ЛЕКЦИЯ 9 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

§1. Признаки монотонности функции на интервале

Определение. Говорят, что функция *f(x)* возрастает (не убывает) на интервале (*а;в*), если для любых двух точек x_1 и x_2 интервала (*а;в*) из условия $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)\le f(x_2)$).

Теорема 1.1. Для того, чтобы дифференцируемая на интервале (*а;в*) функция *f(x)* не убывала (не возрастала) необходимо и достаточно, чтобы $\forall x\in(a;в)$ выполнялось неравенство $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$.

Теорема 1.2. Если функция *f(x)* дифференцируема на интервале (*а;в*) и $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ на (*а;в*), то *f(x)* возрастает (убывает) на (*а;в*).

§2. Локальный экстремум функции

Пусть функция *f(x)* определена всюду в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки x_0, в которой при $x\ne x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ (соответственно $f(x_0)<f(x)$). Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием – локальный экстремум (или просто экстремум).

Теорема 2.1. (Необходимое условие локального экстремума). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0)=0$.

Точки, в которых первая производная функции обращается в ноль, называются стационарными.

Точки, в которых производная функции либо обращается в ноль, либо не существует называются критическими.

Теорема 2.2. (Первое достаточное условие локального экстремума). Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0. Тогда, если при переходе через точку x_0 (в сторону возрастания *x*) производная
$f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция $y=f(x)$ имеет локальный максимум (минимум). Если при переходе через точку x_0 производная функции не меняет знака, то в точке x_0 функция *f(x)* не имеет экстремума.

Теорема 2.3 (Второе достаточное условие локального экстремума). Пусть функция $y=f(x)$ в данной стационарной точке x_0 имеет вторую производную. Тогда, если $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$, то функция *f(x)* в точке x_0 имеет локальный максимум (минимум).

§3. Выпуклость и вогнутость графика функции

Определение. Говорят, что график функции $y = f(x)$ на интервале (*а;в*) выпуклый (вогнутый), если в пределах интервала (*а;в*) график лежит не выше (не ниже) любой касательной.

Теорема 3.1. Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (*а;в*) вторую производную и если эта производная не положительна (не отрицательна), то график функции *f(x)* на интервале (*а;в*) выпуклый (вогнутый).

§4. Точки перегиба графика функции

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется его точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот.

Теорема 4.1. (Необходимое условие перегиба). Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 и $f''(x_0) = 0$. Тогда, если в пределах указанной окрестности вторая производная имеет разные знаки слева и справа от x_0, то график функции имеет перегиб в точке $(x_0, f(x_0))$.

§5. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Прямая $y = kx + в$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если эта функция представлена в виде $f(x) = kx + в + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Теорема 5.1. Для того, чтобы прямая $y = kx + в$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right) = в$. Аналогично вводится понятие наклонной асимптоты графика функции при $x \to -\infty$.

§6. Схема построения графика функции

Изучение заданной функции и построение ее графика целесообразно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции и выяснить поведение функции в точках разрыва и граничных точках области определения.
2. Найти вертикальные и наклонные асимптоты, если они существуют.
3. Установить, является ли функция четной, нечетной, периодической.
4. Найти локальные экстремумы и интервалы возрастания и убывания

функции.

5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

6. Построить график функции.